第 36 講　数列

1　等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ がある．ただし，$b_1>0$，$b_2>0$ とする．この数列の初項から第 n 項までのそれぞれの和 S_n, S'_n に対して，$c_n=\dfrac{S_n}{S'_n}$ とおくとき，$c_1=2$, $c_2=3$, $c_3=3$ を満たすとする．

(1)　等比数列 $\{b_n\}$ の公比を r とする．r の値を求めよ．

(2)　S_n を a_1 と n の式で表せ．

(3)　c_n を n の式で表せ．

＜ Note ＞

2 [1]　実数 a，b を用いて $\sum_{k=5}^{10} i^k = a+bi$ と表すとき，a，b の値を求めよ．ただし i は虚数単位である．

[2]　初項 1，公差 2 の等差数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ をそれぞれ $b_n = \dfrac{2n+1}{a_n}$，$c_n = \log_3 b_n$，$d_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$ で定める．

(1)　d_n を n の式で表せ．

(2)　d_n が整数となるような n を，小さい順に m 個並べたものの和を求めよ．

＜ Note ＞

3 [1]　2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が

$$a_1=2,\ b_1=2,\ a_{n+1}=6a_n+2b_n,\ b_{n+1}=-2a_n+2b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$c_n=a_n+b_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

[2]　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2a_n+n^2$ で与えられるとき，a_{n+1} を a_n を用いて表せ．また，a_n を n の式で表せ．

＜ Note ＞

第36講　数列

[1]　$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\log_5\frac{n+2}{n}=$ ア $\log_5 2+$ イ $\log_5 3+$ ウ $\log_5 11$ である.

[2]　数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，関係式 $S_n=2a_n-n\cdot 2^{n+1}$ が成り立つ.

(1)　$a_1=$ エ ，$a_2=$ オカ である.

(2)　a_{n+1} を a_n と n の式で表すと　$a_{n+1}=$ キ $a_n+(n+$ ク $)\cdot$ ケ $^{n+1}$ となる.

(3)　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$b_n=\dfrac{n(n+\text{コ})}{2}$ と表される．このことより，一般項 a_n は $a_n=n(n+$ コ $)\cdot 2^{n-\text{サ}}$ である.

< Note >

第36講　数列

1　等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ がある．ただし，$b_1>0$，$b_2>0$ とする．この数列の初項から第 n 項までのそれぞれの和 S_n, S_n' に対して，$c_n=\dfrac{S_n}{S_n'}$ とおくとき，$c_1=2$, $c_2=3$, $c_3=3$ を満たすとする．

(1)　等比数列 $\{b_n\}$ の公比を r とする．r の値を求めよ．

(2)　S_n を a_1 と n の式で表せ．

(3)　c_n を n の式で表せ．

(1)　等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d，等比数列 $\{b_n\}$ の初項を b（公比を r）とする．

$c_1=\dfrac{S_1}{S_1'}=\dfrac{a}{b}=2$　より　$a=2b$　……①

$c_2=\dfrac{S_2}{S_2'}=\dfrac{a+(a+d)}{b+br}=\dfrac{2a+d}{b(1+r)}=3$　より　$2a+d=3b(1+r)$　……②

$c_3=\dfrac{S_3}{S_3'}=\dfrac{(2a+d)+(a+2d)}{b(1+r)+br^2}=\dfrac{3a+3d}{b(1+r+r^2)}=3$　より　$3a+3d=3b(1+r+r^2)$

　つまり　$a+d=b(1+r+r^2)$　……③

①を②に代入して　$4b+d=3b(1+r)$　よって　$d=b(3r-1)$　……④

①と④を③に代入して　$2b+b(3r-1)=b(1+r+r^2)$

$b=b_1>0$　より　$2+3r-1=1+r+r^2$　　$r^2-2r=0$　　$r(r-2)=0$

$r=0$ とすると　$b_2=b\cdot 0=0$ より　$b_2>0$ に反し不適　　よって　$\boldsymbol{r=2}$

(2)　①より　$b=\dfrac{a}{2}$　　これと $r=2$ を④に代入して　$d=\dfrac{a}{2}\cdot 5=\dfrac{5}{2}a$

よって

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{n\left\{2a+(n-1)\cdot\frac{5}{2}a\right\}}{2}=\frac{an(5n-1)}{4}=\boldsymbol{\frac{a_1n(5n-1)}{4}}$$

(3)　$S_n'=\dfrac{b(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{\frac{a}{2}(2^n-1)}{2-1}=\dfrac{a_1(2^n-1)}{2}$

したがって　$c_n=\dfrac{S_n}{S_n'}=\dfrac{a_1n(5n-1)}{4}\cdot\dfrac{2}{a_1(2^n-1)}=\boldsymbol{\dfrac{n(5n-1)}{2(2^n-1)}}$

2 [1]　実数 a，b を用いて $\sum_{k=5}^{10} i^k = a+bi$ と表すとき，a，b の値を求めよ．ただし i は虚数単位である．

$$\sum_{k=5}^{10} i^k = i^5+i^6+i^7+i^8+i^9+i^{10} = i+(-1)+(-i)+1+i+(-1) = -1+i$$

よって　$-1+i=a+bi$

a，b は実数より　$\boldsymbol{a=-1,\ b=1}$

2 [2]　初項1，公差2の等差数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ をそれぞれ

$$b_n=\frac{2n+1}{a_n},\quad c_n=\log_3 b_n,\quad d_n=\sum_{k=1}^{n} c_k$$ で定める．

(1)　d_n を n の式で表せ．

(2)　d_n が整数となるような n を，小さい順に m 個並べたものの和を求めよ．

(1)　$a_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$

$$b_n=\frac{2n+1}{a_n}=\frac{2n+1}{2n-1}$$

$$c_n=\log_3 b_n=\log_3\frac{2n+1}{2n-1}=\log_3(2n+1)-\log_3(2n-1)$$

よって　$d_n=\sum_{k=1}^{n}\{\log_3(2k+1)-\log_3(2k-1)\}$

$$=(\log_3 3-\log_3 1)+(\log_3 5-\log_3 3)+(\log_3 7-\log_3 5)+\cdots\cdots+\{\log_3(2n+1)-\log_3(2n-1)\}$$

$$=\boldsymbol{\log_3(2n+1)}$$

(2)　$2n+1$ は3以上の自然数より，d_n が整数となるのは

$2n+1=3^l$（l は自然数），つまり　$n=\dfrac{3^l-1}{2}$ のとき

よって求める和は

$$\sum_{l=1}^{m}\frac{3^l-1}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^m-1)}{3-1}-m\right\}=\boldsymbol{\frac{3^{m+1}-2m-3}{4}}$$

3［1］ 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が

$$a_1=2,\ b_1=2,\ a_{n+1}=6a_n+2b_n,\ b_{n+1}=-2a_n+2b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められるとき，次の問いに答えよ.

(1) $c_n=a_n+b_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) $a_{n+1}=6a_n+2b_n$ ……① $b_{n+1}=-2a_n+2b_n$ ……②

①＋②より $a_{n+1}+b_{n+1}=4(a_n+b_n)$，$a_1+b_1=2+2=4$

よって，$c_n=a_n+b_n$ とおくと $c_{n+1}=4c_n$，$c_1=4$ より

数列 $\{c_n\}$ は初項 4，公比 4 の等比数列.

したがって $c_n=4\cdot 4^{n-1}=\mathbf{4^n}$

(2) (1)より $a_n+b_n=4^n$ よって $b_n=4^n-a_n$

これを①に代入して $a_{n+1}=6a_n+2(4^n-a_n)$

つまり $a_{n+1}=4a_n+2\cdot 4^n$

この両辺を 4^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{4^{n+1}}=\dfrac{a_n}{4^n}+\dfrac{1}{2}$

$d_n=\dfrac{a_n}{4^n}$ とおくと $d_{n+1}=d_n+\dfrac{1}{2}$，$d_1=\dfrac{a_1}{4}=\dfrac{1}{2}$

よって数列 $\{d_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列

したがって $d_n=\dfrac{1}{2}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}n$

つまり $\dfrac{a_n}{4^n}=\dfrac{1}{2}n$ ゆえに $a_n=\boldsymbol{\dfrac{n\cdot 4^n}{2}}$

3 [2]　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2a_n+n^2$ で与えられるとき，a_{n+1} を a_n を用いて表せ．また，a_n を n の式で表せ．

$a_1=S_1=2a_1+1^2$　　よって　$a_1=-1$

$$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\{2a_{n+1}+(n+1)^2\}-(2a_n+n^2)=2a_{n+1}-2a_n+2n+1$$

したがって　$\boldsymbol{a_{n+1}=2a_n-2n-1}$　……①

また，$a_{n+2}=2a_{n+1}-2(n+1)-1$　……②

②－①より　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)-2$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_{n+1}=2b_n-2$　つまり　$b_{n+1}-2=2(b_n-2)$

また，$b_1=a_2-a_1=(2a_1-2\cdot1-1)-a_1=a_1-3=-4$　より　$b_1-2=-6$

よって数列 $\{b_n-2\}$ は　初項 -6　公比 2 の等比数列

したがって　$b_n-2=-6\cdot2^{n-1}$　　$b_n=2-6\cdot2^{n-1}$

つまり　$a_{n+1}-a_n=2-6\cdot2^{n-1}$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2-6\cdot2^{k-1})=-1+2(n-1)-\frac{6(2^{n-1}-1)}{2-1}=2n+3-3\cdot2^n$$

これは $n=1$ のときも成立　　したがって　$\boldsymbol{a_n=2n+3-3\cdot2^n}$

(別解)　①が $a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=2(a_n+\alpha n+\beta)$　……③　と変形できるとすると

③を変形して　$a_{n+1}=2a_n+\alpha n+(-\alpha+\beta)$

これを①と比較して　$\alpha=-2$，$-\alpha+\beta=-1$　　よって　$\alpha=-2$，$\beta=-3$

このとき③より　$a_{n+1}-2(n+1)-3=2(a_n-2n-3)$

$c_n=a_n-2n-3$ とすると　$c_{n+1}=2c_n$，$c_1=a_1-2\cdot1-3=-6$

よって数列 $\{c_n\}$ は初項 -6，公比 2 の等比数列である

したがって　$c_n=-6\cdot2^{n-1}=-3\cdot2^n$

つまり　$a_n-2n-3=-3\cdot2^n$　より　$a_n=2n+3-3\cdot2^n$

第 36 講　数列

[1]　$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\log_5\frac{n+2}{n}=$ ア $\log_5 2+$ イ $\log_5 3+$ ウ $\log_5 11$ である．

[2]　数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，関係式 $S_n=2a_n-n\cdot 2^{n+1}$ が成り立つ．

(1)　$a_1=$ エ ，$a_2=$ オカ である．

(2)　a_{n+1} を a_n と n の式で表すと　$a_{n+1}=$ キ $a_n+(n+$ ク $)\cdot$ ケ $^{n+1}$ となる．

(3)　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$b_n=\dfrac{n(n+\text{コ})}{2}$ と表される．このことより，一般項 a_n は $a_n=n(n+\text{コ})\cdot 2^{n-\text{サ}}$ である．

解答例

[1]　
$$\sum_{n=1}^{10}\log_5\frac{n+2}{n}=\sum_{n=1}^{10}\{\log_5(n+2)-\log_5 n\}$$
$$=(\log_5 3-\log_5 1)+(\log_5 4-\log_5 2)+(\log_5 5-\log_5 3)+\cdots\cdots+(\log_5 12-\log_5 10)$$
$$=-\log_5 1-\log_5 2+\log_5 11+\log_5 12=\log_5 2+\log_5 3+\log_5 11$$

よって　**ア＝1，イ＝1，ウ＝1**

[2]　(1)　$S_1=2a_1-1\cdot 2^2$　より　$a_1=2a_1-4$　　よって　$a_1=\mathbf{4}$

$S_2=2a_2-2\cdot 2^3$　より　$a_1+a_2=2a_2-16$

よって　$4+a_2=2a_2-16$　より　$a_2=\mathbf{20}$

(2)　$S_n=2a_n-n\cdot 2^{n+1}$　……①　より　$S_{n+1}=2a_{n+1}-(n+1)\cdot 2^{n+2}$　……②

②－①より　$S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}-2a_n-(n+1)\cdot 2^{n+2}+n\cdot 2^{n+1}$

これと $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ より

$a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n+(-2n-2)\cdot 2^{n+1}+n\cdot 2^{n+1}$

よって　$a_{n+1}=\mathbf{2}a_n+(n+\mathbf{2})\cdot\mathbf{2}^{n+1}$　……③

(3)　③の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+(n+2)$，$\dfrac{a_1}{2^1}=2$

よって　$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+(n+2)$，$b_1=2$　より，

$n\geqq 2$ のとき　$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)=2+\frac{(n-1)\{3+(n+1)\}}{2}=\frac{n(n+\mathbf{3})}{2}$

これは $n=1$ のときも成立する．　したがって　$a_n=2^n\cdot b_n=n(n+3)\cdot 2^{n-1}$